5

Contigo Aprendo

Primera Edición

Matemática

Educación Primaria Comunitaria Vocacional

Grupo Editorial Kipus

MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE NÚMEROS NATURALES

Unidad 5

SER

- ¿Crees que podemos aprender a realizar los ejercicios que practican los niños de la imagen?
- ¿Consideras que todos los niños y las niñas tienen las mismas capacidades para aprender matemática? ¿Por qué?

¿Sabías que?

Los múltiplos **(M)** de un número resultan de multiplicar dicho número por cada uno de los números naturales.

Los Múltiplos

Se llaman múltiplos **(M)** de un número a todos los números que resultan de la multiplicación de ese número con cada uno de los números naturales.

Ejemplo:

Son múltiplos del número 2 el 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 y muchos más, pues los múltiplos son infinitos como son infinitos los números naturales.

Múltiplo de 2

x 2

2x0	2x1	2x2	2x3	2x4	2x5	2x6	2x7	2x8	2x9	2x10	...
0,	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,	18,	20,	...

Reglas para identificar a los números que son múltiplos

Existen algunas reglas que nos facilitan el saber si un número es múltiplo de otro.

- Al observar la serie de los múltiplos de 2 se encuentra que todos son números pares, generalizando se puede decir que: Todo número par es múltiplo de 2.
- Los números 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,.... son múltiplos de 3; porque al sumar las cifras se obtiene el número 3 o un múltiplo de 3: por ello afirmamos que: Un número es múltiplo de 3 si la suma de sus cifras es 3 o un múltiplo de 3.
- Los números 0, 10, 15, 20, 25, 30... son múltiplos de 5; porque todos ellos terminan en 0 ó 5, por lo tanto, se dice que: Un número es múltiplo de 5 cuando su última cifra es 0 ó 5.

Relaciona con líneas los números con sus correspondientes múltiplos.

10	36, 54, 72, 90, 108
6	28, 42, 56, 70
18	44, 66, 88, 110
4	24, 36, 56, 68
22	30, 48, 72, 90
14	30, 50, 70, 90

Los divisores

Los divisores **(D)** de un número son otros números que lo dividen exactamente (sin residuo).

Por lo tanto, podemos afirmar que el uno (1) es divisor de todos los números. Y que todo número es divisor de sí mismo.

Ejemplos:

Divisores de 16

16 : 1 = 16 por tanto, el 1 y el 16 son divisores de 16.
16 : 2 = 8 por tanto, el 2 y el 8 son divisores de 16.
16 : 3 = NO es exacta.
16 : 4 = 4 por tanto, el 4 es divisor de 16.
Dejamos de dividir ya que el cociente (4) es igual o menor al divisor (4).
Por lo tanto los divisores de 16 son: 1, 2, 4, 8, 16.

Reglas para identificar a los divisores

Estas reglas ayudan a identificar a números divisibles sin tener la necesidad de realizar las operaciones de división. A este conjunto de reglas se las conoce también como criterios de divisibilidad.

- Divisibilidad por 2:

Un número es divisible por 2 cuando termina en cifra par.

Ejemplos:

2, 4, 6, 8, 14, 54, 382, 1.876; los cuales son divisibles entre 2 por que terminan en número par.

- Divisibilidad por 3:

Un número es divisible por 3, si la suma de los dígitos que lo componen, es múltiplo de tres.

Ejemplos:

6, 21, 69, 255, 1.356 son divisibles por 3.

RECUERDA

Los números **pares** son aquellos que se pueden partir o dividir en mitad exacta, siendo aquellos que terminan en 0, 2, 4, 6, 8.

- **Divisibilidad por 4:**

Un número es divisible por cuatro si las dos últimas cifras (unidades y decenas) son dos ceros (00) o son divisibles por cuatro.

Ejemplos:

12, 512, 204, 780, 7.500 porque todos ellos son divisibles entre 4.

- **Divisibilidad por 5:**

Un número es divisible por 5 si su último dígito es 0 o 5.

Ejemplos:

10, 15, 35, 60, 100 son divisibles entre 5.

- **Divisibilidad por 6:**

Un número es divisible entre 6, cuando es divisible tanto entre 2 como entre 3 a la vez.

Ejemplos:

945, 97.428 los cuales son divisibles tanto entre 2 como entre 3; por lo tanto, también lo son entre 6.

- **Divisibilidad por 7:**

Un número es divisible por 7, si el número que se obtiene al separar el último dígito, multiplicado por 2 y restándole el número que queda, es múltiplo de 7.

Ejemplos:

98 es divisible por 7 porque se separa el 9 del 8, luego se multiplica $8 \times 2 = 16$ y se resta $16 - 9 = 7$.

245 es divisible por 7 porque se separa el último dígito, el 5; queda 24. Ahora se multiplica $5 \times 2 = 10$ y se resta $24 - 10 = 14$.

- **Divisibilidad por 8:**

Los números son divisibles por 8 si el número formado por los tres últimos dígitos es exactamente divisible por 8.

Ejemplo:

Los últimos tres dígitos del número 3.624 son 624, este número es divisible por 8 entonces 3.624 es divisible por 8.

- **Divisibilidad por 9:**

Un número es divisible por 9 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.

Ejemplos:

$324 = 3 + 2 + 4 = 9$, al sumar los dígitos nos da como resultado 9; por lo tanto, es divisible entre 9.

31.752 = 3 + 1 + 7 + 5 + 2 = 18 = 1 + 8 = 9 al sumar sus dígitos el resultado es 9 (múltiplo de 9).

457.965 = 4 + 5 + 7 + 9 + 6 + 5 = 36 = 3 + 6 = 9 al sumar sus dígitos el resultado es 9.

6.876 = 6 + 8 + 7 + 6 = 27 = 2 + 7 = 9 al sumar dígitos el resultado es 9.

6.696 = 6 + 6 + 9 + 6 = 27 = 2 + 7 = 9 al sumar dígitos el resultado es 9.

Encuentra los divisores de las siguientes cantidades:

4.570 ....

5.822 ....

2.008 ....

22 ....

663 ....

105 ....

81 ....

355 ....

Marca con una cruz, los números divisibles por los divisores que se indican:

Es divisor / Es divisible	240	297	315	426	656	745	900	920	1.000
2									
3									
4									
5									
6									
8									
10									

Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

El mínimo común múltiplo es el más pequeño (mínimo, menor) de los múltiplos en común que tiene cada una de las cantidades.

Para calcular el mínimo común múltiplo (**m.c.m.**) solo se deben escribir los múltiplos de los números hasta llegar al número 1, cuando se tienen varias cantidades o cifras se debe proseguir hasta llegar con todos al número 1.

Ejemplo:

Obtener el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4 por medio de la descomposición de factores primos.

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ & 3 & 1 & 3 \\ & 1 & & \end{array}$$

m.c.m. = $2 \times 2 \times 3 = 12$

RECUERDA

Para sacar el mínimo común múltiplo, se debe empezar siempre por el menor múltiplo que se tenga en común.

Los pasos a seguir para obtener el m.c.m. son:

Primer paso: Descomponer cada número en factores primos.

Segundo paso: Seleccionar los factores primos en comunes y no comunes con **mayor exponente**.

Tercer paso: Descomponer cada número en productos de factores primos.

Cuarto paso: Multiplicar los factores comunes y no comunes **que tienen el mayor exponente.**

Ejemplo:

Calcula el **m.c.m.** de 12, 15 y 24.

$$\begin{array}{c|c} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$2^2 \times 3 \qquad 3 \times 5 \qquad 2^3 \times 3$$

m.c.m. = $2^3 \times 3 \times 5 = 120$

Encuentra el mínimo común múltiplo de:

10	20	40	80

m.c.m. = ...

Resolvemos con ayuda del profesor(ra) el siguiente problema de **m.c.m.**:

En una calle se están instalando dos semáforos: uno de ellos se pondrá en verde cada 3 minutos y el otro, cada 5 minutos. Una vez que se conecten los semáforos, ¿cuánto tiempo tardarán en ponerse en verde al mismo tiempo por primera vez?

Solución

El primer semáforo se pone en verde: en el minuto 3, en el 6, en el 9, en el 12, en el 15, en el 18, en el 21... (son los múltiplos de 3).
El segundo semáforo lo hace en el minuto 5, en el 10, en el 15, en el 20... (son los múltiplos de 5).
El minuto en el que ambos semáforos se encienden al mismo tiempo por primera vez es al minuto 15 (el mínimo común múltiplo).

Datos	Operaciones
Primer semáforo: cada 3 minutos **Segundo semáforo:** cada 5 minutos	Múltiplos de 3: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21... Múltiplos de 5: 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35... **m.c.m.** = 15

Respuesta: Los dos semáforos cambiarán a verde en el minuto 15.

Resuelve en tu cuaderno:

En una banda el baterista toca en lapsos de 8 tiempos, el guitarrista en 12 tiempos, el bajista en 6 tiempos y el saxofonista en 16 tiempos. Si todos empiezan al mismo tiempo, ¿en cuántos tiempos sus periodos volverán a iniciar en el mismo momento?

Máximo común divisor (M.C.D.)

Es el número mayor que divide a dos o más números (**M.C.D**) en partes iguales y exactas sin dejar residuo (que no sobre nada).

Para sacar el máximo común divisor se deben seguir los siguientes pasos:

Primer paso: Descomponer los números en números primos (producto de potencias de primos).

Segundo paso: Agrupar los factores formando potencias. Observar las potencias formadas y marcar las que son iguales en base y en exponente.

Tercer paso: Multiplicar solamente las potencias que se marcaron en el segundo paso.

Cuarto paso: El máximo común divisor es el resultado final que se obtuvo en el anterior paso.

Ejemplos:

Calculamos el máximo común divisor **(M.C.D.)** de: 180 y 324.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Sus descomposiciones son:

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ $\qquad$ $324 = 3^2 \times 3^2 \times 2^2$

El **máximo común divisor** será el producto de una potencia de base 2 y otra de base 3, ya que son las bases que aparecen en las dos descomposiciones.

La potencia de base 2 tiene el exponente 2 en las dos descomposiciones, así que escribiremos 2^2.

La potencia de base 3 tiene el exponente 2, por lo tanto es 3^2.

Por ello 180 y 324 se descomponen en:

$180 = 2^2 \times 3^2$ $\qquad$ $324 = 2^2 \times 3^2$

$180 = 4 \times 9$ $\qquad$ $324 = 4 \times 9$

$180 = 36$ $\qquad$ $324 = 36$

M.C.D. de 180 y 324 es 36.

Buscamos el máximo común divisor de: 40 y 60.

40	2		60	2
20	2		30	2
10	2		15	3
5	5		5	5
1			1	

Potenciación de las descomposiciones:

$40 = 2^3 \times 5$ $\quad\quad$ $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Los factores comunes del 40 y 60 son el 2 y el 5, con la diferencia de sus exponentes que no son iguales (solo lo son en la base 2), pero se pueden transformar en:

$40 = 2^2 \times 2 \times 5$ $\quad\quad$ $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Entonces sería:

$40 = 2^2 \times 5$ $\quad\quad$ $60 = 2^2 \times 5$

$40 = 20$ $\quad\quad$ $60 = 20$

Resultando como **máximo común divisor (M.C.D.)** de 40 y 60 es 20.

Encuentra el máximo común divisor (M.C.D.):

30	......	42	......	54	......

M.C.D. = ...

Une con líneas de colores las cantidades con su correspondiente M.C.D.:

6; 8; 14	4
12; 16; 20	14
9; 12; 18	2
14; 28; 42	7
7; 14; 35	3

Resolvemos entre todos el siguiente problema de máximo común divisor (**M.C.D.**).

Una empresa pequeña que vende leche cuenta con tres sucursales. Sabemos que la sucursal del norte produce 300 botellas de leche diarios, la del sur produce 240 y la del este produce 360. Se quieren transportar estas botellas de leche en camionetas que lleven el mismo número de botellas, pero que sea el mayor número de botellas posible. ¿Cuántas botellas de leche debe transportar cada camioneta?

Solución

Para saber el número máximo de botellas de leche que debe llevar cada camioneta, debemos calcular el **M.C.D.**

Descomponemos los números: 300, 240, 360.

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$2^2 \times 3 \times 5^2$ $\qquad$ $2^4 \times 3 \times 5$ $\qquad$ $2^3 \times 3^2 \times 5$

El **M.C.D.** se calcula multiplicando los factores «comunes al **menor exponente**»:

$$\text{M.C.D.} = 2^2 \times 3 \times 5$$
$$\text{M.C.D.} = 4 \times 3 \times 5$$
$$\text{M.C.D.} = 60$$

Entonces, cada camioneta debe transportar 60 botellas de leche.

Datos

Sucursal del norte
300 botellas

Sucursal del sur
240 botellas

Sucursal del este
360 botellas

Operaciones

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$2^2 \times 3 \times 5^2$ $\qquad$ $2^4 \times 3 \times 5$ $\qquad$ $2^3 \times 3^2 \times 5$

$$\text{M.C.D.} = 2^2 \times 3 \times 5 = 4 \times 3 \times 5 = 60$$

Respuesta: Cada camioneta debe transportar 60 botellas de leche.

Evaluación

1 Escribe los múltiplos de los siguientes números:

15 ....

19 ....

10 ....

20 ....

2 Encuentra los divisores de las siguientes cantidades.

38 ....

24 ....

150 ....

26 ....

3 Encuentra el **m.c.m.** de los siguientes números:

8 | ......

16 | ......

75 | ......

375 | ......

m.c.m. = ...

4 Encuentra el M.C.D. de los siguientes números.

32 | ......

48 | ......

42 | ......

64 | ......

M.C.D. = ...

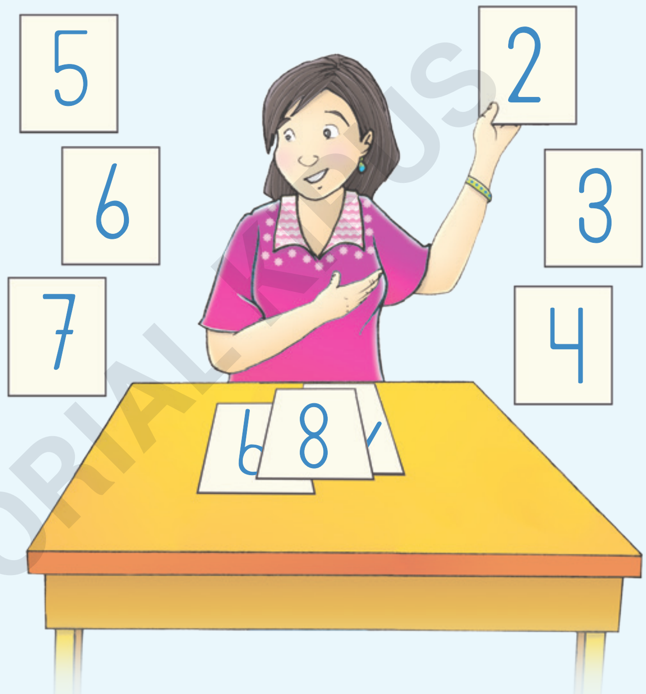
Producción

Objetivo:
Reforzar los criterios de divisibilidad obteniendo mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

HACER
DECIDIR

JUGAMOS A LOS NÚMEROS DIVISIBLES

MATERIALES



- Cuaderno de ejercicios.
- Lápiz.
- Borrador.

PROCEDIMIENTO

1. Formar grupos de trabajo.
2. El profesor o profesora deberá asignar un número a cada grupo y anotar en hojas o cartulinas los números desde el 2 hasta el 10 y guardarlos en una bolsa o caja.
3. Para iniciar el juego el profesor o profesora deberá explicar claramente en qué consiste el juego.
4. Todos los grupos deben estar atentos, porque la profesora o profesor, sacará un número cualquiera de la bolsa o caja y lo mostrará a todos los participantes. Cada grupo deberá indicar los criterios de divisibilidad que tiene ese número y dar dos ejemplos de cantidades divisibles entre ese número.
5. Ganará el grupo que no se equivoque y que de la mayor cantidad de ejemplos de números divisibles con el número indicado por la profesora o profesor.
6. En cada grupo se pueden utilizar los cuadernos de ejercicios, para verificar si los ejemplos que se dan son los correctos.